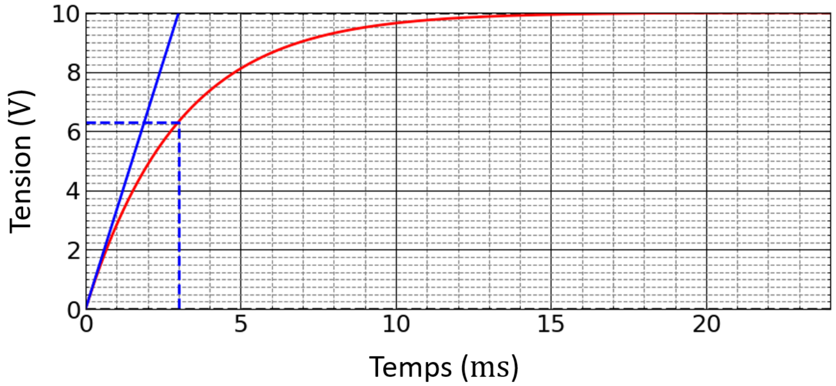
Correction TD - E2

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Constante de temps ★☆☆ 7962

1) Pour chaque cas, deux possibilités :

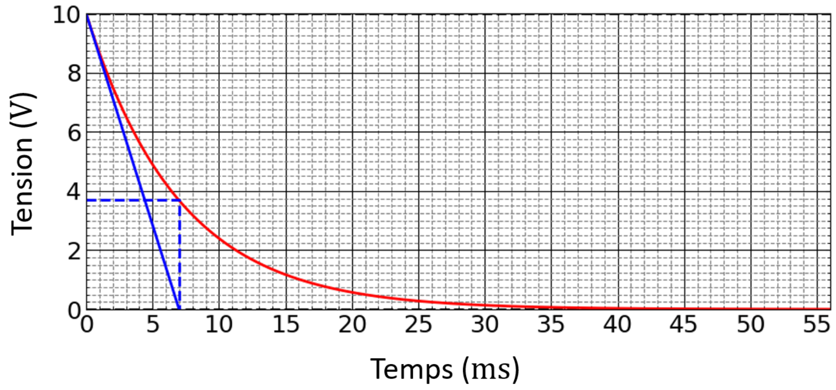
- tracer la tangente à l'origine et regarder le temps où elle intersecte la valeur dans l'état final ;
- regarder le temps où la courbe a parcourue 63 % de l'écart entre état initial et état final.



On en déduit :

$$\boxed{\tau = 3 \text{ ms}}$$

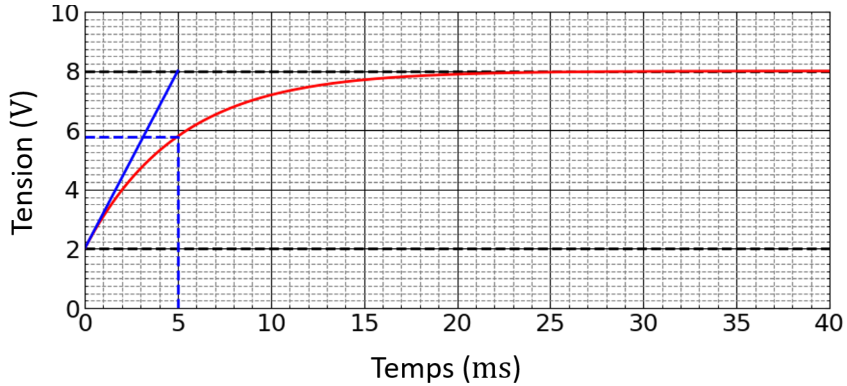
2)



On en déduit :

$$\boxed{\tau = 7 \text{ ms}}$$

3)



On en déduit :

$$\boxed{\tau = 5 \text{ ms}}$$

Ex. n°2 • Circuit RC en régime libre ★☆☆ 7435

1) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et l'intensité est donc nulle (u_R également par la loi d'Ohm).

Loi des mailles en $t = 0^-$:

$$E = u_R + u_C \quad \Rightarrow \quad u_C(0^-) = E$$

Par continuité de u_C, on a : $\boxed{u_C(0^+) = E}$

Loi des mailles en $t = \infty$:

$$0 = u_R + u_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_\infty = u_C(\infty) = 0}$$

2) Loi des mailles :

$$0 = u_R + u_C = Ri + u_C = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = RC}$$

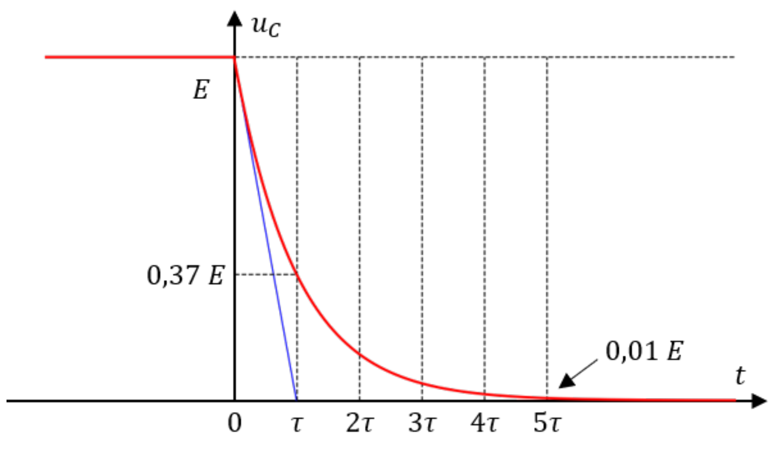
3) Forme générale :

$$u_C(t) = A\ e^{-t/\tau}$$

Avec la condition initiale :

$$u_C(0^+) = E = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C(t) = E\ e^{-t/\tau}}$$

Graphe :



4) Loi des mailles × intensité :

$$0 = u_R i + u_C i \quad \Rightarrow \quad 0 = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

On intègre pour avoir les énergies. Énergie reçue par le condensateur :

$$\mathcal{E}_{el} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) dt = \left[\frac{1}{2}Cu_C^2\right]_0^\infty = \frac{1}{2}C\left(0 - E^2\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{E}_{el} = -\frac{1}{2}CE^2 < 0}$$

On repart du bilan de puissance pour déterminer l'énergie reçue par la résistance :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty Ri^2\ dt = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2 > 0}$$

Le condensateur fournie de l'énergie ($\mathcal{E}_{el} < 0$). Toute cette énergie est dissipée par effet Joule dans la résistance. Le condensateur se décharge.

Ex. n°3 • Circuit RL ★⯪☆ 8780

1) En régime stationnaire, la bobine se comporte comme un fil.

Loi des mailles en $t = 0^-$:

$$0 = u_R \quad \Rightarrow \quad i(0^-) = 0$$

Par continuité de i, on a : $\boxed{i(0^+) = 0}$

Loi des mailles en $t = \infty$:

$$E = u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_\infty = \frac{E}{R}}$$

2) Loi des mailles :

$$E = u_R + u_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{i_\infty}{\tau} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{L}{R}}$$

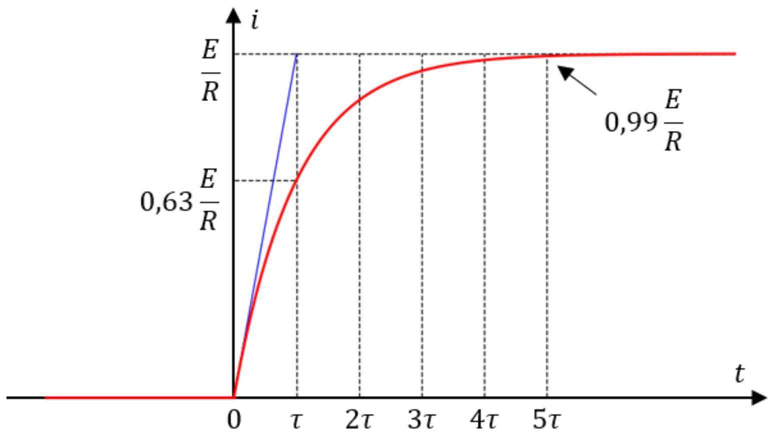
3) Forme générale :

$$i(t) = A\ e^{-t/\tau} + i_\infty$$

Avec la condition initiale :

$$i(0^+) = 0 = A + i_\infty \quad \Rightarrow \quad A = -i_\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = i_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Graphe :



4) Énergie emmagasinée dans la bobine :

$$\mathcal{E}_{mag}(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) = i(t) = \frac{1}{2}Li_\infty^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2$$

Énergie totale fournie par le générateur :

$$\mathcal{E}_g(t) = \int_0^t Ei\,dt = Ei_\infty \int_0^t \left(1 - e^{-t/\tau}\right)dt = Ei_\infty\left[t + \tau\,e^{-t/\tau}\right]_0^t$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_g(t) = Ei_\infty\left(t + \tau\,e^{-t/\tau} - \tau\right)$$

On en déduit :

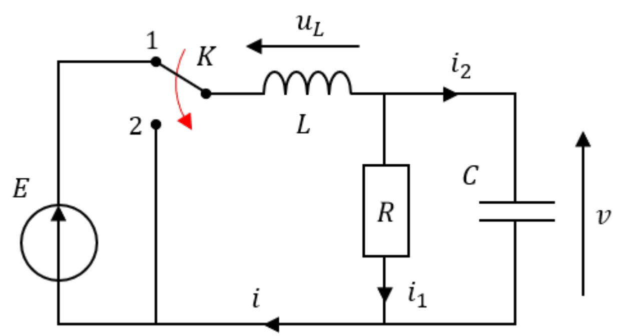
$$\eta(t) = \frac{\frac{1}{2}Li_\infty^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2}{Ei_\infty\tau\left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1\right)}$$

En remplaçant τ et i_∞ par leur expression, on obtient :

$$\boxed{\eta = \frac{\left(1 - e^{-x}\right)^2}{2\left(x + e^{-x} - 1\right)} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{t}{\tau}}$$

Ex. n°4 • Régime stationnaire et continuité ★★☆ 8693

1) Notations :



Pour $t = 0^-$: régime stationnaire, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et la bobine à un fil. On a immédiatement que $\boxed{i_2(0^-) = 0}$

Avec la loi des mailles et la loi des nœuds :

$$E = v = Ri_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1(0^-) = i(0^-) = \frac{E}{R}}$$

Pour $t = 0^+$, on exploite la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité à travers la bobine.

$$\boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}} \quad \text{et} \quad v(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1(0^+) = 0}$$

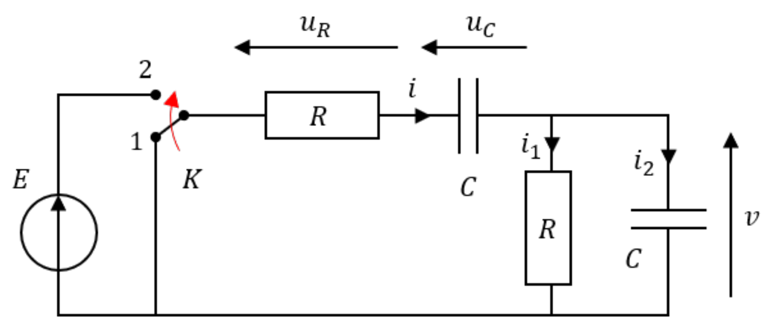
La loi des nœuds donne :

$$i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2(0^+) = \frac{E}{R}}$$

Pour $t = \infty$: régime stationnaire. C'est le même cas qu'en $t = 0^-$ mais sans générateur : on a juste à remplacer E par 0 dans les formules.

$$\boxed{i(\infty) = i_1(\infty) = i_2(\infty) = 0}$$

2) Notations :



Pour $t = 0^-$: régime stationnaire, les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. On a immédiatement que tous les courants sont nuls :

$$\boxed{i(0^-) = i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0}$$

Avec la loi d'Ohm : $u_R(0^-) = v(0^-) = 0$

Avec la loi des mailles : $u_C(0^-) = 0$

Pour $t = 0^+$, on exploite la continuité des tensions aux bornes des condensateurs.

$$u_C(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad v(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1(0^+) = 0}$$

La loi des mailles donne :

$$E = u_R + u_C + v \quad \Rightarrow \quad u_R(0^+) = E \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$$

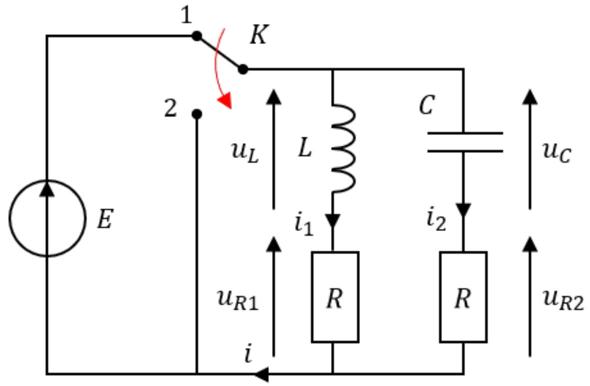
La loi des nœuds donne :

$$i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2(0^+) = \frac{E}{R}}$$

Pour $t = \infty$: régime stationnaire. On a immédiatement que tous les courants sont nuls :

$$\boxed{i(\infty) = i_1(\infty) = i_2(\infty) = 0}$$

3) Notations :



Pour $t = 0^-$: régime stationnaire, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert et la bobine à un fil. On a immédiatement que $\boxed{i_2(0^-) = 0}$

Avec la loi des mailles et la loi des nœuds :

$$E = Ri_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1(0^-) = i(0^-) = \frac{E}{R}}$$

Loi des mailles dans la branche générateur, condensateur, résistance :

$$E = u_C + u_{R2} \quad \Rightarrow \quad u_C(0^-) = E$$

Pour $t = 0^+$, on exploite la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité à travers la bobine.

$$\boxed{i_1(0^+) = \frac{E}{R}} \quad \text{et} \quad u_C(0^+) = E$$

Loi des mailles dans la branche du condensateur :

$$0 = u_C + u_{R2} \quad \Rightarrow \quad u_{R2}(0^+) = -E \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2(0^+) = -\frac{E}{R}}$$

La loi des nœuds donne :

$$i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(0^+) = 0}$$

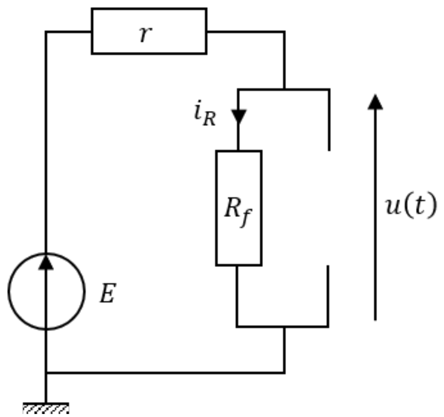
Pour $t = \infty$: régime stationnaire. C'est le même cas qu'en $t = 0^-$ mais sans générateur : on a juste à remplacer E par 0 dans les formules.

$$\boxed{i(\infty) = i_1(\infty) = i_2(\infty) = 0}$$

Pour aller plus loin

Ex. n°5 • Courant de fuite d'un condensateur ★★☆ 5974

1) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert. Le circuit équivalent est donc :



2) Il s'agit d'un pont diviseur de tension :

$$\boxed{u = \frac{R_f}{R_f + r}\ E}$$

3) Sous cette hypothèse :

$$\boxed{u \simeq \frac{R_f}{R_f}\ E = E}$$

La tension aux bornes du condensateur est presque égale à E. Il faut un voltmètre très précis pour voir la différence et ainsi pour pouvoir estimer R_f.

4) Lorsque l'interrupteur est ouvert, la loi des nœuds donne :

$$0 = i_R + i_C \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{u}{R_f} + C\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_f C} = 0}$$

La solution complète est :

$$\boxed{u(t) = \frac{R_f}{R_f + r} E\ e^{-t/R_f C}}$$

5) D'après l'énoncé, la tension $u(t)$ chute de 10 % en un temps T. Cela signifie que :

$$u(T) = u(0) \times 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad e^{-T/R_f C} = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_f = -\frac{T}{C\ \ln(0{,}9)} = 10\ \mathrm{k\Omega}}$$

Ex. n°6 • Étincelle de rupture ★★☆ 3228

1) En $t = 0^-$, la résistance R est court-circuitée et la bobine est équivalente à un fil électrique. La loi des mailles donne donc :

$$E = 0 + 0 + u_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(0^-) = \frac{E}{r}}$$

L'intensité i à travers la bobine est continue en $t = 0$. Donc : $\boxed{i_0 = i(0^+) = \frac{E}{r}}$

2) Une fois l'interrupteur ouvert, les deux résistances sont en série. On pose donc : $\boxed{R_{eq} = R + r}$

3) La loi des mailles donne :

$$E = R_{eq} i + u_L = R_{eq} i + L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}}}$$

4) La solution est :

$$i(t) = A\ e^{-t/\tau} + \frac{E\tau}{L} = A\ e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_{eq}}$$

Conditions initiales :

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ED}}}{=} A + \frac{E}{R_{eq}} \quad \Rightarrow \quad A = E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{eq}}\right)$$

Ainsi, après simplification :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_{eq}}\left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau}\right)}$$

5) D'après la loi d'Ohm :

$$\boxed{u_K(t) = Ri(t) = \frac{R}{R_{eq}}\ E\left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau}\right)}$$

En particulier,

$$\boxed{u_K(0^+) = \frac{R}{r}\ E}$$

Dans le cas où $R \gg r$, on a : $\boxed{u_K(0^+) \to +\infty}$

6) AN : $\boxed{u_K(0^+) = 40\ \text{kV}}$

Cette valeur est comparable à celle des lignes haute tension. On va observer en pratique un arc électrique lors de l'ouverture.

Ex. n°7 • Charge d'un condensateur par un autre ★★★ 6108

1) La tension aux bornes des condensateurs est continue :

$$\boxed{u_1(0^+) = E \quad \text{et} \quad u_2(0^+) = 0}$$

Une loi des mailles donne :

$$0 = u_1 + Ri + u_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(0^+) = -\frac{E}{R}}$$

2) Loi des mailles que l'on dérive :

$$0 = u_1 + Ri + u_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + R\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} + R\frac{di}{dt}$$

On met l'équation sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}}$$

La solution s'écrit :

$$i(t) = A\ e^{-t/\tau}$$

Avec les conditions initiales :

$$i(0^+) = A = -\frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\ e^{-t/\tau}}$$

3) On a :

$$i = C\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t du = \int_0^t \frac{i}{C}\ dt \quad \Rightarrow \quad u(t) = u(0^+) + \int_0^t \frac{i}{C}\ dt$$

Or,

$$\int_0^t \frac{i}{C}\ dt = -\frac{E}{RC}\left[-\tau\ e^{-t/\tau}\right]_0^t = \frac{E\tau}{RC}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)$$

On en déduit $u_1(t)$ et $u_2(t)$:

$$u_1(t) = E + \frac{E\tau}{RC_1}\left(e^{-t/\tau} - 1\right) \quad \text{et} \quad u_2(t) = \frac{E\tau}{RC_2}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)$$

En simplifiant :

$$\boxed{u_1(t) = E + \frac{EC_2}{C_1 + C_2}\left(e^{-t/\tau} - 1\right) \quad \text{et} \quad u_2(t) = \frac{EC_1}{C_1 + C_2}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)}$$

Remarque : on retrouve bien la loi des mailles

$$0 = u_1 + Ri + u_2$$

4) Énergie finale stockée dans le condensateur 2 :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}C_2u_2^2(\infty) = \frac{1}{2}C_2\left(\frac{EC_1}{C_1 + C_2}\right)^2$$

Énergie initialement présente dans le condensateur 1 :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}C_1u_1^2(0^+) = \frac{1}{2}C_1E^2$$

On en déduit le rendement :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{C_1C_2}{(C_1 + C_2)^2}}$$

Pour s'entraîner au DS

Ex. n°8 • Circuit RL à deux mailles ★★☆ 7562

1) Pour $t = 0^-$, toutes les intensités sont nulles. Par continuité de i_2, on en déduit que $i_2(0^+) = 0$. La seule possibilité est la courbe (c).

Remarque : une loi des nœuds donne

$$i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad i(0^+) = i_1(0^+)$$

Ce qui est bien observé sur le graphe.

Lorsque $t \to \infty$, la bobine devient équivalente à un fil. La résistance $R/2$ est donne court-circuitée, aucun courant ne la traverse : $i_1(\infty) = 0$. Il s'agit de la courbe (a).

<u>Remarque</u> : de nouveau, une loi des nœuds donne

$$i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad i(\infty) = i_2(\infty)$$

Ce qui est bien observé sur le graphe.

Et finalement i correspond à la (b).

<u>Remarque</u> : on observe également graphiquement que $i = i_1 + i_2$.

2) Puisque $i_2(0^+) = 0$ (par continuité), alors $i(0^+) = i_1(0^+)$. Les deux résistances sont parcourues par la même intensité et on peut donc appliquer le pont diviseur de tension de $R/2$.

$$\boxed{u_L(0^+) = \frac{R/2}{R + R/2}\,E = \frac{E}{3}}$$

3) La bobine devient équivalente à un fil, donc $\boxed{u_\infty = 0}$

4) On part de la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
&E = Ri + u_L \\
&E = R\,(i_1 + i_2) + u_L && \leftarrow \; i = i_1 + i_2 \\
&0 = R\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + \frac{du_L}{dt} && \leftarrow \; \frac{d}{dt} \\
&0 = R\left(\frac{2}{R}\,\frac{du_L}{dt} + \frac{u_L}{L}\right) + \frac{du_L}{dt} && \leftarrow \; u_L = \frac{Ri_1}{2} \quad \text{et} \quad u_L = L\,\frac{di_2}{dt} \\
&\boxed{\frac{du_L}{dt} + \frac{u_L}{\tau} = 0} && \leftarrow \; \boxed{\tau = \frac{3L}{R}}
\end{aligned}$$

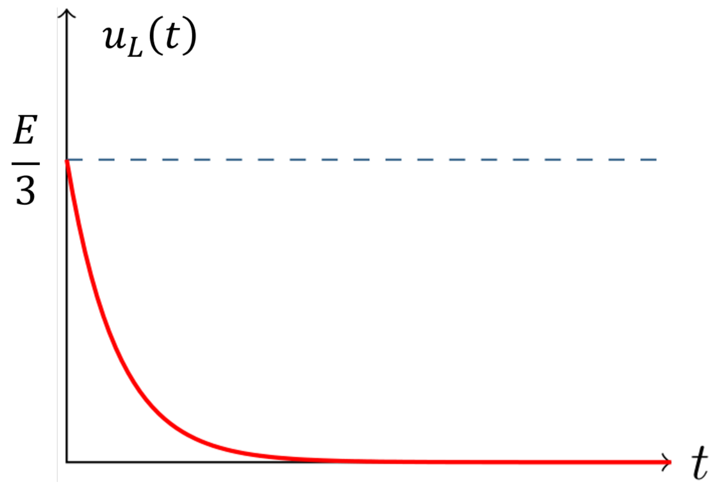
5) Forme générale :

$$u_L(t) = A\,e^{-t/\tau}$$

Avec la condition initiale :

$$u_L(0^+) = \frac{E}{3} = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_L(t) = \frac{E}{3}\,e^{-t/\tau}}$$

Graphe :



6) On a :

$$\tau = \frac{3L}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{R\tau}{3} = 10 \text{ mH}}$$

Ex. n°9 • Lampe à décharge ★★★ 0141

1) Le condensateur est déchargé, donc la lampe est éteinte. Tout se passe comme si la lampe n'existe pas (résistance infinie). On se retrouve dans le cas du circuit RC du cours après fermeture de l'interrupteur.

$$\boxed{\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{\tau_1} = \frac{E}{\tau_1} \quad \text{avec :} \quad \tau_1 = rC}$$

2) Lorsque la lampe est éteinte, $U_d(t)$ est régit par l'ED ci-dessus. La solution est donnée par :

$$U_d(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$$

La lampe s'allume uniquement si $|U_d(t)| > U_a$. Il faut donc que $\boxed{E > U_a}$

Le temps d'allumage vaut alors :

$$U_a = E\left(1 - e^{T_a/\tau_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_a = \tau_1 \times \ln\left(\frac{E}{E - U_a}\right)}$$

3) On suppose que la lampe est allumée. La loi des mailles donne :

$$E = ri + U_d = r\,(i_c + i_d) + U_d = r\left(C\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{R_d}\right) + U_d$$

On en déduit, après simplification :

$$\boxed{\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{\tau_2} = \frac{E}{\tau_1} \quad \text{avec :} \quad \tau_2 = \frac{\tau_1}{1 + r/R_d}}$$

4) On pose $t = 0$ le temps où la lampe s'éteint (nouvelle origine des temps pour simplifier les expressions). La solution de l'ED est :

$$U_d(t) = A\ e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1}E = A\ e^{-t/\tau_2} + \frac{E}{1 + r/R_d}$$

Avec les CI :

$$U_a = A + \frac{E}{1 + r/R_d} \quad \Rightarrow \quad A = U_a - \frac{E}{1 + r/R_d}$$

Ainsi :

$$\boxed{U_d(t) = \left(U_a - \frac{E}{1 + r/R_d}\right) e^{-t/\tau_2} + \frac{E}{1 + r/R_d}}$$

La lampe s'éteint si $U_d < U_e$. Cela se produit au temps :

$$U_e = U_d\left(T_e\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_e = \tau_2 \times \ln\left(\frac{U_a - \frac{E}{1 + r/R_d}}{U_e - \frac{E}{1 + r/R_d}}\right)}$$

5) Ensuite, on repart sur la première ED. La tension U_d augmente, ce qui va inévitablement allumer la lampe. On retombe alors dans la deuxième ED, etc. On obtient une succession de flashs lumineux. On peut choisir les durées des flashs en choisissant la valeur de r.